

Sujet : Analyse des Laplaciens hypoelliptiques à bord

Mots-clés: Analyse spectrale d'opérateurs hypoelliptiques et non auto-adjoints, Laplacien hypoelliptique, déformation à la Witten analyse sur les variétés, asymptotiques de type semiclassiques théorie de Morse et homologie persistante.

Laboratoire: LAGA, ED-Galilée.

Directeur de thèse : Francis Nier (LAGA)

Le Laplacien hypoelliptique a été introduit autour de 2004 par J.M. Bismut pour donner une version espace des phases des déformations à la Witten des Laplaciens de Hodge. Il colle vraiment à la dynamique de Langevin du mouvement brownien. En plus, de son intérêt géométrique et topologique, son analyse a des motivations très fortes du côté des applications, notamment pour la compréhension fine des techniques de simulation moléculaire (voir en autre les travaux de T. Lelièvre et ses collaborateurs ou le texte de synthèse de N. Berglund [1]). L'analyse spectrale précise de ces opérateurs sur des variétés à bords est très importante alors que jusqu'à présent on en connaît peu de chose, contrairement au cas elliptique des Laplaciens de Witten ou toute une collection de résultats précis en asymptotique semiclassique (asymptotique basse température) ont été obtenus depuis 40 ans. Dans [8,9], l'introduction de problèmes à bord artificiels est une étape importante pour localiser l'analyse spectrale des Laplaciens de Witten dans le cas elliptique. On espère arriver à la même situation pour le Laplacien hypoelliptique de Bismut. La thèse s'appuiera sur les travaux de J.M. Bismut entre autres [2], G. Lebeau [6,7], Bismut-Lebeau [3], S. Shen [11] sur les Laplaciens hypoelliptiques sur des variétés sans bord, les travaux de F. Nier avec divers collaborateurs d'une part sur les Laplaciens de Witten entre autres [4,8,9] puis sur les conditions aux limites pour les équations de Kramers-Fokker-Planck géométriques [10], ainsi que des développements plus récents réalisés dans une collaboration de S. Shen et F. Nier.

Ce sujet de thèse s'adresse à un(e) étudiant(e) de M2-mathématique ayant de solides bases en analyse et en géométrie différentielles et riemannienne.

La direction sera effectuée par F. Nier . S. Shen (IMJ-PRG), collaborateur récent de F. Nier, pourra apporter un appui sur certains aspects géométriques.

Bibliographie

1. N. Berglund. Kramer's law: validity, derivation and generalisation. *Markov Process. Related Fields* Vol. 19 no. 3 (2013) pp 459–490.
2. J.M. Bismut. The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. *Journal of the American Math. Soc.*, **18** no. 2 (2005) pp 379–476.
3. J.M. Bismut, G. Lebeau. The Hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer Metrics. *Annals of Mathematics Studies* 167 (2008).
4. B. Helffer, F. Nier Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach: the case with boundary, *Mémoires de la SMF* 105 (2006), vi+89 pages.

5. F. Hérau, M. Hitrik, and J. Sjöstrand. Tunnel effect and symmetries for Kramers-Fokker-Planck type operators. *J. Inst. Math. Jussieu* 10 (3) (2011) pp. 567–634.
6. G. Lebeau. Geometric Fokker-Planck equations. *Port. Math. (N.S.)* **64** no. 4 (2005), 469–530.
7. G. Lebeau. Equations de Fokker-Planck géométriques. II. Estimations hypoelliptiques maximales. *Ann. Inst. Fourier.* **57** no. 4 (2007) 1285–1314
8. D. Le Peutrec, F. Nier, C. Viterbo. Precise Arrhenius law for p-forms: The Witten Laplacian and Morse-Barannikov complex *Ann. Henri Poincaré* Vol. 14, No 3, pp 567–610 (2013)
9. D. Le Peutrec, F. Nier, C. Viterbo. Bar codes of persistent cohomology and Arrhenius law for p-forms. *ArXiv:2002.06949*
10. F. Nier. Boundary conditions and subelliptic estimates for geometric Kramers-Fokker-Planck operators on manifolds with boundaries. *Mem. Amer. Math. Soc.* **252** no. 1200 (2018).
11. S. Shen. Laplacien hypoelliptique, torsion analytique et théorème de Cheeger-Müller. *J. Funct. Anal.* **270** (2016) pp. 2817–2999.